数理解析研究所講究録 1375 巻 2004 年 85-91

議席配分法に対する線形時間アルゴリズム

伊藤 暁　　　井上克司

山口大学工学部*　　　山口大学工学部†

AKIRA ITO　　　KATSUSHI INOUE

YAMAGUCHI UNIVERSITY　　　YAMAGUCHI UNIVERSITY

あらまし　議席配分（通常は，議員定数配分，比例配分，按分などと呼ばれる）の問題に対する代表的な計算方式には，ハミルトン法とも呼ばれる最大剰余法とドント方式をはじめとする５つの除数法が知られている．前者の計算が線形時間で済むことはほぼ自明である．一方，後者の議席配分法に対する従来の計算アルゴリズムは最良のものでも $O(n\log n)$ 時間が必要であった．本稿では後者に対する計算も $O(n)$ 時間で済むことを示す．ここに，n は選挙へ参加する政党数であり，一様コスト基準の下で入力データサイズに比例する．

1. はじめに

議席配分問題 (Apportionment Problem) とは，得票数 $v_1,\ldots,v_n \in \mathbb{N}$ と総議席数 $S \in \mathbb{N}$ が与えられたとき，$\sum_{i=1}^{n} s_i = S$ となるような議席配分 $s_1,\ldots,s_n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ を決定せよ，という問題である．このとき，s_i が理想配分‡ $\bar{s}_i = S\cdot v_i/\sum_{i=j}^{n} v_j \in \mathbb{R}$ に近いほど望ましい．

上記は比例代表制 (proportional representation) 選挙を想定しているが，選挙区への議員定数を配分する問題として考える場合には，党を選挙区や州に，得票数を有権者人口に読み替える．なお，米下院議員の定数配分問題の場合には，憲法上の規定により $s_i \geq 1$ という制約がある．

後述する様々な方式名称からも分かるように議席配分問題は長い歴史を持つ [7, 9, 10]．工学的な応用分野として，実験の計画，人口階層からのサンプリング，記述統計学など [14] が挙げられるが，大学の各学部への学生数に応じた奨学生の割り当て [11] など身近な問題にも適用可能である．

我が国においても，衆参両議院選挙にドント方式が採用されて以来この問題が広く知られるようになった．特にドント方式は選挙のみならず，党首討論の各党持ち時間の配分，スポーツ大会での各地区からの出場チーム数割り当てなどに適用されるほど既にお馴染みの存在になっている．

ドント方式は設定される問題自体よりもそれを計算するアルゴリズムの方が一般に良く知られている特異な事例である．通常の計算法では，政党の得票数を１から順に整数で割り，その商の大きい順に政党に議席を与える．計算例を表１に与える．ここでは，政党数 7，議席総数 11，投票総数 3,835,634 である．丸数字は議席の決定順を表す．このアルゴリズム自体は貪欲法（逐次添加法）の部類に属するが [3]，本例のように優先順位表 (priority table) を書き出した上で，大きい方から議席総数分までを選び出すのが手計算での通例である．

実は，ドント方式以外にも代表的な配分法として表２に示すものが知られている．後述するように，上記の配分法のうち最大剰余法以外は，使用される丸め関数が異なるだけで設定される目標そのものは同じである．本稿ではこれら５つを総称して**除数法系議席配分法**と呼んでいる．

良く知られているように任意の正数 x, y に対して，$2xy/(x+y) \leq \sqrt{xy} \leq (x+y)/2$ である．従って，$x < 2x(x+1)/(2x+1) \leq \sqrt{x(x+1)} \leq x+1/2 < x+1$ より，$\mathsf{Round}_{\mathrm{D}}(x) \leq \mathsf{Round}_{\mathrm{H}}(x) \leq \mathsf{Round}_{\mathrm{G}}(x) \leq \mathsf{Round}_{\mathrm{S}}(x) \leq \mathsf{Round}_{\mathrm{A}}(x)$ なる順序関係が成り立つ．

なお，最大剰余法はアラバマパラドクス（総議席数が増えたときに配分議席が減る州が生ずる現象）が避けられないことが知られている．また上記以外にも，最大剰余法と除数法系配分法を折衷したクオータ法 (quota method) と呼ば

---

*ito@csse.yamaguchi-u.ac.jp

†inoue@csse.yamaguchi-u.ac.jp

‡通常はクオータ (quota) と呼ばれる [12, 13]．$\sum_{i=1}^{n} v_i/S$ がクオータ単位である．

表 1. 優先順位表に基づくドント方式計算例

政党	A	B	C	D	E	F	G
得票数	1,364,938	831,747	587,603	353,973	341,851	340,358	15,164
1/1	①1364938.0	②831747.0	④587603.0	⑦353973.0	⑧341851.0	⑩340358.0	15164.0
1/2	③ 682469.0	⑥415873.5	⑪293801.5	176986.5	170925.5	170179.0	
1/3	⑤ 454979.3	277249.0	195867.7				
1/4	⑨ 341234.5						
1/5	272987.6						
当選者数	4	2	2	1	1	1	0

れる配分法もあるが，人口パラドクス（A州の人口は増えB州は減ったのにA州の配分議席が減りB州が増加する現象）が避けられない [9].

従来，議席配分問題は資源配分問題の一種として，オペレーションズリサーチ分野で主に研究されてきたが [5, 6]，最近では計算複雑さの観点からも考察され始めた [8, 12]．ところが，表 2 に示すような標準的な議席配分方式について，それらの計算量を厳密に考察したものは筆者らが知る限り見受けられない．本稿では，従来の計算アルゴリズムについてまとめるとともに，これらの問題に対して線形時間アルゴリズムが存在することを示す．

まず，次節で以後の議論のための準備を行なう．ただし，ドント方式に限れば補題 2.1 の (1)，ならびに定義 2.2 と 2.3 のみで十分である．

2. 準備

丸め関数が関与する議論では，不等号が多用されるために見通しが悪くなりがちである．そこで，本稿では δ-記法とよぶ新たな記法を用いる．この記法により式の結果が整数であることが直感的に把握できる．

定義 2.1 (δ-記法) $k \in \mathbb{Z}$ に対して，$k\delta \triangleq \begin{cases} 0,1,\ldots,\text{または } k, & k \geq 0 \text{ のとき}, \\ -k,\ldots,-1,\text{または } 0, & k < 0 \text{ のとき}. \end{cases}$ $\pm k\delta \triangleq -k\delta \bigcup k\delta = -k,\ldots,-1,0,1,\ldots$, または k.

このように，δ-記法では通常のオーダ記法と同様，等号 $p = q$ は左辺の式集合 p が 右辺の式集合 q に包含されることを意味する (例えば，$1 = 2\delta$)．δ-記法どうしの和と積については次のことが言える:$k\delta + l\delta = \begin{cases} (k+l)\delta, & k,l \text{ が同符号のとき}, \\ \pm\max\{|k|,|l|\}\delta, & k,l \text{ が異符号のとき}. \end{cases}$ $k \cdot l\delta = (k \cdot l)\delta$.

事実 2.1 $x,y,z \in \mathbb{R}$ とする．(1) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$, (2) $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ ($\because \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$), (3) $x \leq \lceil x \rceil < x+1$ ($\because \lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$), (4) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x+y \rfloor - \delta$, (5) $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil = \lceil x+y \rceil + \delta$, (6) $[x]_{std} + [y]_{std} + [z]_{std} = [x+y+z]_{std} \pm \delta$.

(証明)：(1)〜(3) は明らか（文献 [2]）．(4)：$x \bmod 1 \triangleq x - \lfloor x \rfloor$（$x$ の小数部分）とおくと，$0 \leq x \bmod 1 < 1$ より，$0 \leq x \bmod 1 + y \bmod 1 < 2$ が成り立つ．従って，$0 \leq x+y-(\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) < 2$ より，$\lfloor x+y \rfloor - (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) = 0$ または 1. (5): (4) と (1) より，$-(\lceil x \rceil + \lceil y \rceil) = -\lceil x+y \rceil - \delta$. (6):(4) より，$[x]_{std} + [y]_{std} + [z]_{std} = \lfloor x+1/2 \rfloor + \lfloor y+1/2 \rfloor + \lfloor z+1/2 \rfloor = \lfloor x+y+1 \rfloor + \lfloor z+1/2 \rfloor - \delta = \lfloor x+y+z+1+1/2 \rfloor - 2\delta = [x+y+z]_{std} + 1 - 2\delta = [x+y+z]_{std} \pm \delta$. □

次の補題は，実数 x を n 分割し，各々の小数点以下を切り捨てる（切り上げる，四捨五入する）と，その和は $\lfloor x \rfloor$ よりも最大 $n-1$ だけ減少（$n-1$ だけ増加，$\lfloor n/2 \rfloor$ だけ減少または増加）することを意味する．

補題 2.1 $\sum_{i=1}^{n} x_i = x \in \mathbb{R}$ とする．(1) $\sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i \rfloor = \lfloor x \rfloor - (n-1)\delta$, (2) $\sum_{i=1}^{n} \lceil x_i \rceil = \lceil x \rceil + (n-1)\delta$, (3) $\sum_{i=1}^{n} [x_i]_{std} = [x]_{std} \pm \lfloor n/2 \rfloor \delta$.

(証明) $n=1$ のときは全て自明．(1):事実 2.1 の (4) より，$n=2$ のとき成り立つ．$n=3$ のとき，$\lfloor x_1 \rfloor + \lfloor x_2 \rfloor + \lfloor x_3 \rfloor = \lfloor x_1+x_2 \rfloor + \lfloor x_3 \rfloor - \delta = \lfloor x_1+x_2+x_3 \rfloor - 2\delta$. 以上の議論を $n-1$ 回繰り返す．(2):(1) と同様．(3): 事実 2.1 の (6) より，$n=3$ のとき成り立つ．$n=5$ のとき，$[x_1]_{std} + [x_2]_{std} + [x_3]_{std} + [x_4]_{std} + [x_5]_{std} = [x_1+x_2+x_3]_{std} + [x_4]_{std} + [x_5]_{std} \pm \delta = [x_1+x_2+x_3+x_4+x_5]_{std} \pm \delta \pm \delta = [x_1+x_2+x_3+x_4+x_5]_{std} \pm 2\delta$. 以上の議論を繰り返せば，$\sum_{i=1}^{2k+1} [x_i]_{std} = [x]_{std} \pm k\delta$

表 2. 代表的な議席配分法

方式名称（別名）[7, 9]	使用される丸め関数 [12]
ドント方式 d'Hondt 最大平均法（他法を含む場合がある）Highest averages method ジェファーソン法 Jefferson's Method 最大除数法 Greatest divisors	$\mathrm{Round_D}(x)$ $= x$ 以下の最大の整数 $\triangleq \lfloor x \rfloor$
調和平均法 Harmonic mean ディーン法 Dean's Method	$\mathrm{Round_H}(x)$ $= \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x < 2\lfloor x \rfloor(\lfloor x \rfloor + 1)/(2\lfloor x \rfloor + 1) \text{ のとき,} \\ \lfloor x \rfloor + 1, & \text{そうでないとき.} \end{cases}$
幾何平均法 Geometric mean ハンチントン法 Huntington's method ヒル法 Hill's method ハンチントン-ヒル法 Huntington-Hill's method 米下院方式 the House of Representatives 等比率法 Equal Proportions	$\mathrm{Round_G}(x)$ $= \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x < \sqrt{\lfloor x \rfloor(\lfloor x \rfloor + 1)} \text{ のとき,} \\ \lfloor x \rfloor + 1, & \text{そうでないとき.} \end{cases}$
サンラグ方式 Sainte-Lague ウェブスター法 Webster's Method 主要端数部法 Major fractions	$\mathrm{Round_S}(x)$ $= \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x < \lfloor x \rfloor + 1/2 \text{ のとき,} \\ \lfloor x \rfloor + 1, & \text{そうでないとき.} \end{cases}$ $= \lfloor x + 1/2 \rfloor = x$ の小数部四捨五入 $\triangleq \lfloor x \rceil_{std}$
アダムス法 Adams Method 最少除数法 Smallest divisors	$\mathrm{Round}_A(x)$ $= \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x = \lfloor x \rfloor \text{ のとき,} \\ \lfloor x \rfloor + 1, & \text{そうでないとき.} \end{cases}$ $= x$ 以上の最少の整数 $\triangleq \lceil x \rceil$
最大剰余法 Largest remainders ハミルトン法 Hamilton's Method ビントン法 Vinton	$(\lfloor x \rfloor)$

を得る．ここで，$x_{2k+1} = 0$ とおくと，n が偶数の場合 $\sum_{i=1}^{2k} \lfloor x_i \rceil_{std} = \lfloor x \rceil_{std} \pm k\delta$ が得られる．何れの場合も $k = \lfloor n/2 \rfloor$ と表される． □

なお，上記の最大誤差を実現する例は人工的に作成できる．例えば，$x_1 = 1 + \Delta\ (0 < \Delta < 1)$, $x_i = 1 - \Delta/(n-1)\ (2 \le i \le n)$ とおくと，$\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ であるが，$\sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i \rfloor = 1$.

次に，議席配分法の計算問題を定義する．

定義 2.2 以下の問題を除数法系究値問題と呼ぶ：

INPUT: 政党数 n，各政党の得票数 $v_1, v_2, \ldots, v_n$，議席総数 S.

OUTPUT: $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Round}(\bar{s}_i \cdot \alpha) = S$ を満たす実数 α （及び，各党への配分数 $\mathrm{Round}(\bar{s}_i \cdot \alpha)$）を求めよ．

ここに，$\bar{s}_i$ は理想配分数 $S \cdot v_i / \sum_{j=1}^{n} v_j$ であり，$\mathrm{Round}(x)$ は指定された丸め演算である．

この問題は $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Round}(v_i/\beta) = S$ なる β （1当選者当たりの得票数）を求める問題と言い換えられるが，表1の優先順位表に基づく計算法は，解 β（の候補の境界点）を最大値から順次定員に達するまで段階的に下げていくことで求めている．除数法 (divisor method) と呼ばれる所以である．

なお，アダムス法は他の除数法と異なり優先順位表における数値は，下限ではなく下界の値を表すことになる．例えば，順位表の項目に x という数値がある場合には $x + \gamma\ (\gamma > 0)$ で1議席増加することを意味する．

定義 2.3 以下の問題を最大剰余法究値問題と呼ぶ：

INPUT: 除数法系究値問題と同じ．

OUTPUT: $\sum_{i=1}^{n}\lfloor\bar{s}_i+\alpha\rfloor = S$ を満たす実数 α （及び，各党への配分数 $\lfloor\bar{s}_i+\alpha\rfloor$）を求めよ†.

ここで，最大剰余法究値問題における α の取りうる範囲は $0\le\alpha<1$ であることに注意（$\because \sum_{i=1}^{n}\lfloor\bar{s}_i+1\rfloor > S$）．除数法系究値問題では調整パラメータ α が乗数係数であるのに対して，最大剰余法では加算項である．いずれにせよ，非線形方程式の根を求める問題に他ならない．ただし，根 α は一意に定まる訳ではなく，丸め関数の単調性によってある実数区間になる．

なお，本稿では計算量の評価基準としては実際的な一様計算コストを採用する（四則演算や比較演算の１操作を１単位の計算と数える）．また議論を簡単にするため，上述の究値問題には多重解は存在しないものと仮定する（実際上も同順位が起きることは稀である）．

文献 [17, 7] では簡単な不等式を用いることで，ドント方式において２つの政党が合併すれば議席が１もしくは０増加することが証明されている．このことは，事実 2.1 の (4) より明らかである．更に，問題定義 2.2 から次のことが容易にわかる．

系 2.1 ドント方式に対する通常の逐次添加アルゴリズムを実行したとき，最後の議席を確保する党を臨界党 (critical party) と呼ぶ（表１の例ではＣ党）．

(1) ２つ以上の党の合併によりそれらの議席が１増加したとき，替わりに１議席減となるのは臨界党である．

(2) 臨界党と合併しても議席は増加しない．

（証明）まず，臨界党とは定義 2.2 において，乗数 α を１から徐々に増加していったとき，左辺を右辺 S に初めて等しくさせる項 $\lfloor\bar{s}_i\alpha\rfloor$ に対応する党であることに注意する．(1): もしある２つの政党が合併し，対応する２つの和項が１つの和項になったときに１議席増加，すなわち $\lfloor(\bar{s}_j+\bar{s}_k)\alpha\rfloor = \lfloor\bar{s}_j\alpha\rfloor + \lfloor\bar{s}_k\alpha\rfloor + 1$ となったとする．このままだと，条件式の右辺は S から $S+1$ になってしまうので，乗数 α を小さくして条件式右辺を S に戻すよう調整されるはずである．このような α の変化によって，最初に減らされる和項は臨界党に他ならない．(2): 臨界党に対応する和項の丸め関数内部の数 $\bar{s}_i\alpha$ はちょうど整数になっている．従って，臨界党と合併しても (1) のような乗数 α の調整は起こりえず，議席は増加しない． □

3. 従来の除数法系アルゴリズム

除数法系究値問題を解くアルゴリズムには，表１のように優先順位表を用いるものをはじめとして，２分法を推奨するもの [12] や果ては試行錯誤法 (try and error) によるものなどがある．以下に示すのは，各種の議席配分方式を計算する bazi ソフトウェア [15] で採用されていると推測されるアルゴリズムである．（計算量解析が与えられてないものの，同種のアルゴリズムが文献 [16, 6] に示されている）．

従来のドント方式究値アルゴリズム [14]

1. 各 $i(1\le i\le n)$ について，正規化された重み $w_i = v_i/\sum_{j=1}^{n} v_i$ ならびに初期配分数 $s_i = \lfloor S\cdot w_i\rfloor$ を計算する．

2. 以下を，不足配分数 $d = S - \sum_{i=1}^{n} s_i$ 回繰り返す：

2.1 $(s_{i_{\min}}+1)/w_{i_{\min}} = \min\{(s_i+1)/w_i \mid 1\le i\le n\}$ なる $i_{\min}$ を求める．

2.2 $s_{i_{\min}} = s_{i_{\min}} + 1$ とする．

定理 3.1 従来のアルゴリズムは時間 $O(n\log n)$ でドント方式究値問題を正しく計算する．

（証明）正当性：優先順位表に基づく通常のアルゴリズムでは v_i/s の値が大きい方から S 個までを選んでいるが，本アルゴリズムでは $s/w_i = s/v_i\cdot\sum_{i=j}^{n} v_j$ の値が小さい方から選んでいる．ここに，s は各党ごとの配分数変数である．また，前者では初期配分数を０から始めるが，後者では予め確定可能な初期値から始めている．要するに，両者は順序同型である．詳しくは，文献 [14] を参照されたい．
計算量：データ構造としてヒープ [1, 4] を採用すれば，ステップ 2.1 における最小値削除ならびに挿入の各操作は $O(\log n)$ で済む．一方，補題 2.1 の (1) より，ステップ 2. の繰り返し回数は $d = \sum_{i=1}^{n} S\cdot w_i - \sum_{i=1}^{n}\lfloor S\cdot w_i\rfloor \le n-1$ で抑えられる．従って，ヒープの初期構成を含めステップ 2. は $O(n\log n)$ で済む．他のステップが $O(n)$ で済むことは明らか． □

†この $\bar{s}_i$ を $(S+1)\cdot v_i/\sum_{j=1}^{n} v_j$ などに変更する方式もある．

ただし，文献 [14] では，ステップ 4. において時間 $O(n)$ の素朴な最小値アルゴリズムが採用されているため，計算量は $O(n^2)$ と記されている．同文献では，全ての除数法系問題に対応するよう一般化されており，また多重解のための後処理についても詳述されている．

なお，通常の優先順位表に基づく計算法の時間計算量は $O(Sn)$ 以上になる．

4. 線形時間アルゴリズム

除数法系究値アルゴリズムを議論する前に，最大剰余法を線形時間で計算するアルゴリズムを与える．

提案する最大剰余法究値アルゴリズム

1. 各 $i(1 \le i \le n)$ について，理想配分数 $\tilde{s}_i = S \cdot v_i / \sum_{j=1}^{n} v_j$ ならびに初期配分数 $s_i^0 = \lfloor \tilde{s}_i \rfloor$ を計算する．
2. 各 $i(1 \le i \le n)$ について，剰余 $\alpha_i = \tilde{s}_i - s_i^0$ を求める．
3. $C = \bigcup_{i=1}^{n} \{\alpha_i \mid \alpha_i > 0\}$ の中から不足配分数 $d = S - \sum_{i=1}^{n} s_i^0$ 番目に大きい要素 $\alpha_{d\text{th}}$ を求める．
4. 各 $i(1 \le i \le n)$ について，追加配分数 $\Delta s_i = |\{\alpha \in C_i \mid \alpha \le \alpha_{d\text{th}}\}|$ を求め，$s_i = s_i^0 + \Delta s_i$ とする．

定理 4.1 提案アルゴリズムは $O(n)$ 時間で最大剰余法究値問題を正しく計算する．

(証明)：正当性については問題定義 2.3 より明らか．ステップ 2. は，小さい方から d 番目の要素を求める線形時間の選択アルゴリズム [1, 4] を用いれば $O(n)$ で済む．他のステップが $O(n)$ で済むことは明らかであるから，全体で $O(n)$ で抑えられる． □

次に示す除数法系究値アルゴリズムは，上記の最大剰余法アルゴリズム中に用いた線形時間の選択アルゴリズムが使えるよう，第 2 章に示した丸め関数の誤差評価を用いることで，従来の除数法系アルゴリズムを改善したものである．

提案するドント方式究値アルゴリズム

1. 各 $i(1 \le i \le n)$ について，理想配分数 $\tilde{s}_i = S \cdot v_i / \sum_{j=1}^{n} v_j$ ならびに初期配分数 $s_i^0 = \lfloor \tilde{s}_i \rfloor$ を計算する．
2. 各 $i(1 \le i \le n)$ について，追加候補集合 $C_i = \{\alpha \mid \alpha < 1 + n/S,\ \alpha = s/\tilde{s}_i,\ s > s_i^0,\ s \in \mathbb{N}\}$ を求める．
3. $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ の中から不足配分数 $d = S - \sum_{i=1}^{n} s_i^0$ 番目に小さい要素 $\alpha_{d\text{th}}$ を求める．
4. 各 $i(1 \le i \le n)$ について，追加配分数 $\Delta s_i = |\{\alpha \in C_i \mid \alpha \le \alpha_{d\text{th}}\}|$ を求め，$s_i = s_i^0 + \Delta s_i$ とする．

定理 4.2 提案アルゴリズムは $O(n)$ 時間でドント方式究値問題を正しく計算する．

(証明) 正当性：本アルゴリズムは初期配分数からの追加候補を限定している点以外は，従来のアルゴリズムと本質的に等価である（$s/\tilde{s}_i = s/w_i/S$ に注意）．以下では，このような候補限定が問題ないことを示す．

$\sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_i \cdot \alpha = S \cdot \alpha$ ならびに補題 2.1 の (1) より，$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \tilde{s}_i \cdot \alpha \rfloor \ge \lfloor S \cdot \alpha \rfloor - (n-1)$ がなりたつ．ここで究値問題の条件式 $\sum_{i=1}^{n} \lfloor \tilde{s}_i \cdot \alpha \rfloor = S$ を代入すると，乗数 α は $\lfloor S \cdot \alpha \rfloor \le S + (n-1) < S + n$ を満たさなければならないことがわかる．従って，$S \cdot (S+n)/S = S + n$ より，α の上界は $\alpha < (S+n)/S$ となる．

計算量：ステップ 1. ならびに 4. の計算が $O(n)$ で済むことは明らか．以下では，追加候補集合 C_i のサイズの合計が $O(n)$ であることを示す．まず，$s = \tilde{s}_i \cdot \alpha < \tilde{s}_i \cdot (S+n)/S$ より，

$$|C_i| = \left|\{s \mid s < \tilde{s}_i(S+n)/S, s > s_i^0, s \in \mathbb{N}\}\right|$$

が成り立つことに注意する†．従って，補題 2.1 の (2) および $\sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_i = S$ より，$|C| = \sum_{i=1}^{n} |C_i| < \sum_{i=1}^{n} \left\{\tilde{s}_i(S+n)/S - s_i^0\right\} \le \sum_{i=1}^{n} \{\tilde{s}_i(1+n/S) - \tilde{s}_i\} + n = \sum_{i=1}^{n} \tilde{s}_i \cdot n/S + n = 2n$ を得る．このことにより，ステップ 2. の計算量が $O(n)$ で済み，更にステップ 3. において線形時間の選択アルゴリズム [1, 4] を用いることで，全体で $O(n)$ 時間で抑えられることがわかる． □

他の除数法に対する計算についてはアルゴリズムを次のように変更する：初期配分数を $s_i^0 = \mathrm{Round}(\tilde{s}_i)$ とし，追加（あるいは削減）候補集合 C_i は定理 4.2 の証明と同様な議論に基づいて以下とする．

† $s < \tilde{s}_i(S+n)/S$ より，s は $\tilde{s}_i(S+n)/S$ 未満の最大の整数．$\therefore s \le \lceil \tilde{s}_i(S+n)/S \rceil - 1$．文献 [18] によると，この上限は $s \le \lfloor \tilde{s}_i(S+(n-1))/S \rfloor$ にまで改善できる．

- アダムス法 : $\{\alpha \mid \alpha > (S-n)/S,\ \alpha = s/\tilde{s}_i,\ s < s_i^0,\ s \in \mathbb{N}\}$
- サンラグ方式 : $\{\alpha \mid (S - \lfloor n/2 \rfloor - 1/2)/S \leq \alpha < (S + \lfloor n/2 \rfloor + 1/2)/S,\ \alpha = s/\tilde{s}_i,\ s \neq s_i^0,\ s \in \mathbb{N}\}$
- その他の方式 : $\{\alpha \mid (S-n)/S < \alpha < (S + \lfloor n/2 \rfloor + 1/2)/S,\ \alpha = s/\tilde{s}_i,\ s \neq s_i^0,\ s \in \mathbb{N}\}$

上記いずれの場合でも, $|C| = \sum_{i=1}^{n} |C_i| = O(n)$ となることに注意する. なお, 乗数 α の範囲については若干改善の余地がある.

提案したドント式究値アルゴリズムの実行例を表 3 に示す. データは米下院議員定数配分のための第 22 回 2000 年国勢調査を用いた（実際の米下院では幾何平均法が採用されている）. ここに, α の上界によって予め除外できる追加候補は省いてある（18 州については追加配分がないことが予め確定する）. 取り消し線は最終的に追加集合から除外された要素である. ちなみに表 1 の例では, 各党に対する初期配分数がそれぞれ 3, 2, 1, 1, 0, 0, 0, α の上界 1.636, 追加可能数はそれぞれ +3, +1, +1, 0, +1, +1, 0 と予め求まる.

5. むすび

本稿で示した議席配分方式計算アルゴリズムは入力データサイズに関して理論上最適である一方, 実際の手計算においても威力を発揮する. 実のところ, 表 3 は MS Excel 上で求めている（選択アルゴリズムには標準組み込み関数 SMALL(範囲, 順位) を用いた）.

今後の課題として, 計算誤差の評価（α の計算に必要な桁数）や文献 [13] で提案されている一般化された議席配分問題 (Generalized Apportionment Problem) に対する効率の良いアルゴリズムについて考察することが挙げられる.

謝辞

本稿の内容について山口大学情報メディア基盤センター王躍助教授と実り多い議論を行なうことができた. ここに感謝致します.

参考文献

[1] A.V. Aho, J.E. Hopcroft, and J.D. Ullman, The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley (1974).
[2] D.E. Knuth, 基本算法／基礎概念, サイエンス社（昭５３）.
[3] 島内剛一他編, アルゴリズム辞典, 共立出版 (1994).
[4] 茨木俊秀, Ｃによるアルゴリズムとデータ構造, 昭晃堂 (1999).
[5] 今野浩, 数理決定法入門, 朝倉書店 (1992).
[6] 平下幸男, 数理科学のレッスン, 産業図書 (1992).
[7] M. Balinski and H. Young, Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote, 2nd Edition, Brookings Institution Press, Washington DC (2001).
[8] M. Garey and D. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman and Company (1979).
[9] J. Malkevitch, http://www.ams.org/new-in-math/cover /apportion1.html
[10] J. Malkevitch, http://www.ams.org/new-in-math/cover/apportionII1.html
[11] 茨木俊秀, 数理科学, No.209, pp.52-60 (1980).
[12] E. Hemaspaandra and L.A. Hemaspaandra, Proc. MFCS2000, LNCS 1893, pp.64-83 (2000).
[13] J. Bautista, R. Company, and A. Corominas, European J. of Operational Research 131, pp.676-684 (2001).
[14] G. Dorfleitner and T. Klein, Statistical Papers 40, pp.143-157 (1999).
[15] BAZI homepage (Calculation of Allocations by Apportionment Methods in the Internet), http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/ bazi/, (Feb. 2003).
[16] M. Ossipoff, http://www.barnsdle.demon.co.uk/vote/Sainte.html, (Sept. 2002).
[17] 本山弘満, http://www.saga-ed.go.jp/center/shiryo/shohou/17.pdf.
[18] 佐藤道一, 数理解析研究所講究録 1055, pp.12-44 (1998).

表 3. 提案アルゴリズムによるドント方式計算例

州名	有権者数 v_i	理想配分 $\tilde{s}_i$	初期配分 s_i^0	追加候補 $s/\tilde{s}_i \in C_i$ +1	+2	+3	+4	+5	+6	追加配分 Δs_i	配分 s_i
CA	33930798	52.4472	52	1.0105	1.0296	1.0487	~~1.0677~~	~~1.0868~~	~~1.1059~~	3	55
TX	20903994	32.3115	32	1.0213	~~1.0523~~	~~1.0832~~	~~1.1142~~			1	33
NY	19004973	29.3762	29	1.0212	~~1.0553~~	~~1.0893~~				1	30
FL	16028890	24.7760	24	1.0090	1.0494	~~1.0898~~				2	26
IL	12439042	19.2271	19	1.0402	~~1.0922~~					1	20
PA	12300670	19.0133	19	1.0519	~~1.1045~~					1	20
OH	11374540	17.5817	17	1.0238	~~1.0807~~					1	18
MI	9955829	15.3888	15	1.0397	~~1.1047~~					1	16
NJ	8424354	13.0216	13	~~1.0751~~							13
GA	8206975	12.6856	12	1.0248	~~1.1036~~					1	13
NC	8067673	12.4703	12	1.0425						1	13
VA	7100702	10.9756	10	1.0022	~~1.0933~~					1	11
MA	6355568	9.8239	9	1.0179						1	10
IN	6090782	9.4146	9	~~1.0622~~							9
WA	5908684	9.1331	9	~~1.0949~~							9
TN	5700037	8.8106	8	1.0215						1	9
MO	5606260	8.6656	8	1.0386						1	9
WI	5371210	8.3023	8	~~1.0840~~							8
MD	5307886	8.2044	8	~~1.0970~~							8
AZ	5140683	7.9460	7	1.0068						1	8
MN	4925670	7.6137	7	1.0507						1	8
LA	4480271	6.9252	6	1.0108						1	7
AL	4461130	6.8956	6	1.0151						1	7
CO	4311882	6.6649	6	1.0503						1	7
KY	4049431	6.2592	6								6
SC	4025061	6.2216	6								6
OK	3458819	5.3463	5								5
OR	3428543	5.2995	5								5
CT	3409535	5.2702	5								5
IA	2931923	4.5319	4	~~1.1033~~							4
MS	2852927	4.4098	4								4
KS	2693824	4.1639	4								4
AR	2679733	4.1421	4								4
UT	2236714	3.4573	3								3
NV	2002032	3.0946	3								3
NM	1823821	2.8191	2	~~1.0642~~							2
WV	1813077	2.8025	2	~~1.0705~~							2
NE	1715369	2.6515	2								2
ID	1297274	2.0052	2								2
ME	1277731	1.9750	1	1.0127						1	2
NH	1238415	1.9142	1	1.0448						1	2
HI	1216642	1.8806	1	~~1.0635~~							1
RI	1049662	1.6225	1								1
MT	905316	1.3994	1								1
DE	785068	1.2135	1								1
SD	756874	1.1699	1								1
ND	643756	0.9951	0	1.0050						1	1
AK	628933	0.9721	0	1.0287						1	1
VT	609890	0.9427	0								0
WY	495304	0.7656	0								0
計 50	281424177	435.0000	409							26	435

※ α の上界 $(S+n)/S = 1.11494253$, $d = 435 - 409 = 26$, $\alpha_{\mathrm{dth}} = 1.0519$（波線の要素）.